

Soient a et b deux entiers relatifs multiples de 3.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a = 3k$$

Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$b = 3n$$

On peut alors écrire

$$ab = 3k \times 3n$$

$$ab = 9kn$$

k et n sont des nombres entiers relatifs,

Donc kn est bien un entier relatif

Et ab est un multiple de 9.

On considère trois nombres entiers consécutifs :

notons n le premier de ces nombres.

Alors les deux autres sont $n + 1$, $n + 2$

On peut donc écrire leur somme

$$n + (n + 1) + (n + 2)$$

$$= 3n + 2 + 1$$

$$= 3n + 3$$

$$= 3(n + 1)$$

Et $n \in \mathbb{Z}$ donc $n + 1 \in \mathbb{Z}$.

Donc leur somme est un multiple de 3.

Soit a un nombre entier relatif.

On peut écrire :

$$a^2 - a = a(a - 1)$$

On distingue deux cas :

1er cas : le nombre a est pair

donc 2 est un diviseur de a ,

alors 2 est un diviseur de $a(a - 1)$

et $a^2 - a$ est pair.

2e cas : le nombre a est impair

donc $a - 1$ est pair et 2 est un diviseur de $a - 1$.

Alors 2 est un diviseur de $a(a - 1)$

et $a^2 - a$ est pair.

Soient a et b deux nombres entiers naturels avec $a \geq b$.

On démontre la propriété par contraposée :

Montrons que si $a^2 - b^2$ est un nombre premier, a et b sont consécutifs.

Supposons que $a^2 - b^2$ est un nombre premier.

On peut écrire

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Comme $a^2 - b^2$ est un nombre premier, ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

De plus, $a - b \leq a + b$.

Donc $a - b = 1$ et $a + b = a^2 - b^2$.

Alors $a = b + 1$

donc les nombres a et b sont des entiers consécutifs.

Soient a et d deux nombres entiers relatifs.

Supposons que a est un multiple de d .

Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kd$

On peut écrire

$$a^2 = (kd)^2$$

$$= kd \times kd$$

$$= k^2 \times d^2$$

Et $k \in \mathbb{Z}$ donc $k^2 \in \mathbb{Z}$

Donc a^2 est un multiple de k^2 .

Soient a , b et k trois nombres entiers relatifs.

Supposons que a et b sont multiples de k .

Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a = kn$$

Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$b = km$$

On peut alors écrire

$$a + b = kn + km$$

$$= k(n + m)$$

Et n et m sont des entiers relatifs, donc $n + m$
également

Donc $a + b$ est multiple de k .

Soit n un nombre impair.

Le nombre impair suivant est $n + 2$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$
tel que $n = 2k + 1$.

Alors on peut écrire

$$n + 2 = 2k + 3$$

et leur somme est

$$\begin{aligned} n + (n + 2) &= (2k + 1) + (2k + 3) \\ &= 4k + 4 \\ &= 4(k + 1) \end{aligned}$$

Et $k \in \mathbb{Z}$ donc $k + 1 \in \mathbb{Z}$

Donc $n + (n + 2)$ est un multiple de 4.

Soit n un entier relatif et $a = n(n^2 + 3)$.

On distingue deux cas : 1er cas : si n est pair.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.

$$\text{Donc } a = 2k((2k)^2 + 3)$$

$$\text{et } k \in \mathbb{Z} \text{ donc } k((2k)^2 + 3) \in \mathbb{Z}$$

alors 2 est un diviseur de a et a est pair.

2e cas : si n est impair.

Alors n^2 est impair car le carré d'un nombre impair est impair.

$$\text{Il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n^2 = 2k + 1.$$

$$\text{On peut écrire : } a = n(2k + 1 + 3)$$

$$= n(2k + 4) = 2 \times n(k + 2)$$

Et n et k sont des entiers relatifs donc $n(k + 2)$ également,

alors 2 est un diviseur de a et a est pair.

Soit n un nombre impair.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}n^3 &= (2k + 1)^3 \\&= (2k + 1)(2k + 1)^2 \\&= (2k + 1)(4k^2 + 4k + 1) \\&= 8k^3 + 8k^2 + 2k + 4k^2 + 4k + 1 \\&= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\&= 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1\end{aligned}$$

et $k \in \mathbb{Z}$ donc $4k^3 + 6k^2 + 3k$ est un entier relatif

donc n^3 est impair.

Soient a et b deux nombres entiers naturels. On pose
$$n = 10a + b.$$

Supposons que $a - 2b$ est divisible par 7.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - 2b = 7k$.

Alors on peut écrire $a = 2b + 7k$

En remplaçant a par cette expression dans l'expression
de n ,

$$n = 10(2b + 7k) + b$$

$$= 20b + 70k + b$$

$$= 70k + 21b$$

$$= 7(10k + 3b)$$

Et k et b sont des nombres entiers donc $10k + 3b$
également.

Donc 7 est un diviseur de n .

On démontre cette propriété par l'absurde.

Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers.

Notons N le plus grand nombre premier.

Notons P le produit de tous les nombres entiers de 1 à N :

$$P = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (N - 1) \times N.$$

On considère à présent le nombre $P + 1$.

On distingue deux cas :

1er cas : $P + 1$ est premier.

Alors comme $P + 1 \geq N$,

on a une contradiction avec le fait que N est le plus grand nombre premier.

2e cas : $P + 1$ n'est pas premier.

Alors il a un diviseur premier : notons-le d .

Comme $1 \leq d \leq N$, d divise P car il fait partie du produit $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (N - 1) \times N$.

Comme d divise aussi $P + 1$, il divise
 $(P + 1) - P = 1$

Alors d est un nombre premier qui divise 1 :
contradiction. Donc il existe une infinité de nombres
premiers.