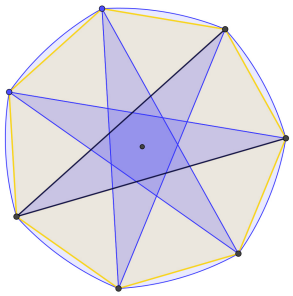
Aire d'un polygone de Reuleaux

HENRY Etienne

13 avril 2021

Dans ce paragraphe, on calcule géométriquement l'aire d'un polygone de Reuleaux ayant un nombre de côtés impair. Cette démonstration peut également être faite à l'aide de série de Fourier. Ici, seuls des outils élémentaires sont nécessaires. On le fera dans le cadre de largeur constante valant 1.

On considère un polygone de Reuleaux impair à $n \geq 3$ côté d'aire totale $\mathcal{A}(n)$. On sépare l'aire à déterminer en deux parties, l'aire du polygone régulier initial, et celle des segments de disque qui le complètent.



Proposition 0.1. *L'aire d'un polygone de Reuleaux de largeur 1 à $n \geq 3$ côtés, n impair, est*

$$\mathcal{A}(n) = \frac{\pi}{2} - \frac{n}{2}\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Démonstration. On considère ici un secteur de disque. Pour déterminer son angle, on applique le théorème de l'angle au centre au cercle circonscrit au polygone (voir figure ci-dessous), il vient qu'il s'agit d'un secteur de disque de rayon 1 (égale à la largeur de notre corps convexe) et d'angle $\frac{\pi}{n}$, donc d'aire $\frac{\pi}{2n}$.

Il faut ensuite déduire quelques longueurs, en se plaçant sur un secteur qui compose le polygone de Reuleaux.

Le Théorème d'Al-Kashi appliqué au triangle ABC donne $BC^2 = 2 - 2\cos(\frac{\pi}{n})$ d'où

$$BC = \sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}.$$

En appliquant un argument de trigonométrie au triangle rectangle OBH il vient

$$OH = \frac{\sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}}{\sqrt{2}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Ce qui permet de déduire l'aire A_T du triangle OBC :

$$A_T = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

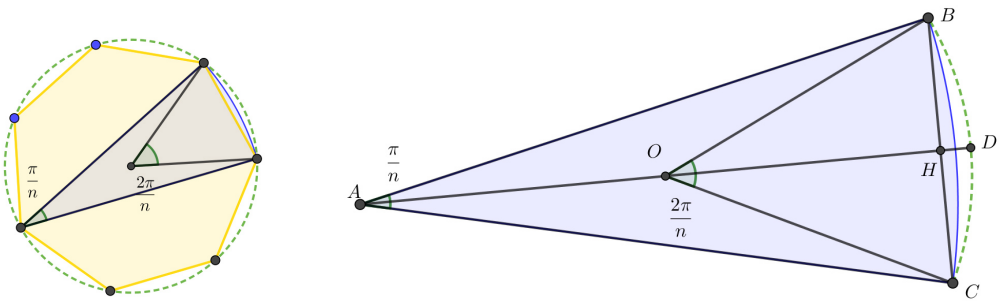


Figure 1 – A gauche : application du Théorème de l'angle au centre au cercle circonscrit (en vert). A droite : Secteur de cercle de rayon 1 (en bleu), où O est le centre du cercle circonscrit (barycentre des sommets du polygone), et où on a ajouté en vert l'arc de cercle circonscrit. On a construit H comme projeté de O sur $[BC]$.

Il reste à déterminer l'aire A_C de la section de cercle que l'on a ajouté pour « arrondir » le polygone, et qui vaut $\frac{\pi}{2n} - Aire(ABC)$. Pour déterminer cette aire, on calcule sa hauteur AH. Comme $AB = AC$ et $OB = OC$ on a A, O, H alignés car sur la médiatrice de $[BC]$ et on a donc avec le théorème de Pythagore $AH^2 + BH^2 = 1$, d'où

$$AH = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}}$$

et finalement $A_C = \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}}\sqrt{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} = \frac{\pi}{2n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}$ car $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$.

Donc l'aire du polygone de Reuleaux est

$$\mathcal{A}_n = \frac{n}{2}\left(\frac{\pi}{n} - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$$

Avec ce qui précède et en observant que $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan(\frac{x}{2})$ on a le résultat. □

Corollaire 0.1. *L'aire des polygones de Reuleaux impairs pour une largeur fixée est croissante selon le nombre de côtés.*

Démonstration. On dérive simplement pour $x \geq 3$: $f(x) := \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right)$ et il vient

$$f'(x) = \frac{-x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi}{2x\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + 1\right)}$$

qui est positif si et seulement si $\frac{\pi}{x} \geq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ ce qui est vérifié car $\sin(x) \leq x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. □